

El problema de la definición de la base privilegiada móvil y una posible solución

Mario Castagnino¹ y Sebastian Fortin¹

Resumen

El tratamiento ortodoxo de la decoherencia establece que la interacción entre un sistema cuántico y el ambiente, produce la diagonalización del operador de estado en la base privilegiada. Como el operador de estado es diagonalizable en todo momento, la definición de la base privilegiada se vuelve central para el programa de la decoherencia. En este trabajo se argumenta que los criterios de identificación de la base privilegiada resultan insuficientes y se introduce una propuesta para definir esta base en forma rigurosa.

¹ CONICET, IAFE (CONICET-UBA) y FCEN (UBA), Argentina.

El problema de la definición de la base privilegiada móvil y una posible solución

Mario Castagnino¹ y Sebastian Fortin¹

1. Introducción

En los últimos años el estudio de la decoherencia cuántica se ha vuelto importante debido que es un proceso que es preciso eliminar para lograr el funcionamiento de las computadoras cuánticas. Esto se debe a que la decoherencia elimina algunas correlaciones cuánticas que son la esencia de los procesos de interés de la computación. El enfoque ortodoxo de la decoherencia establece que la decoherencia se produce cuando el estado del sistema se vuelve diagonal en la base privilegiada. En este trabajo mostraremos que la identificación de la base privilegiada es fundamental, ya que sin una definición precisa el fenómeno de la decoherencia carece de sentido alguno. Luego argumentaremos que los criterios de identificación de dicha base existentes hasta el momento resultan insuficientes. Y finalmente se propone un método que permite la identificación de la base privilegiada.

2. El enfoque ortodoxo

2.1 El proceso de decoherencia

La decoherencia es un proceso originalmente concebido para explicar la diagonalización de la matriz reducida. Su versión ortodoxa, la decoherencia inducida por el ambiente (*Environment Induced Decoherence*, EID), es un enfoque que se aplica a sistemas abiertos ya que, como su nombre lo indica, considera al sistema bajo estudio S embebido en un ambiente E que induce la decoherencia (Schlosshauer 2007). El universo $U = S \cup E$ es el sistema cerrado compuesto, por lo que el estado inicial del sistema total se construye como el producto tensorial de los estados iniciales de sus subsistemas:

$$\hat{\rho}_U(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0) \quad (1)$$

El estado total del sistema evoluciona, según la ecuación de Liouville – von Neumann:

$$\frac{d\hat{\rho}_U}{dt} = \frac{1}{i} [\hat{H}, \hat{\rho}_U] \quad (2)$$

Tomando la traza parcial del estado total evolucionado, se recuperara el estado reducido evolucionado:

¹ CONICET, IAFE (CONICET-UBA) y FCEN (UBA), Argentina.

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_E \hat{\rho}_U(t) \quad (3)$$

La dinámica del estado reducido responde a una ecuación maestra no unitaria, distinta en cada problema particular. Así, según el enfoque EID, el estudio de la decoherencia se basa en el estudio de la evolución de la matriz reducida escrita en una dada base. Ya sea calculando explícitamente $\rho_S(t)$ o analizando caso por caso la ecuación maestra, es posible determinar si en determinadas condiciones el operador de estado reducido se vuelve diagonal o no. En muchos modelos de sistemas físicos donde la cantidad de grados de libertad del ambiente es enorme, se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \hat{\rho}_S(t) = \hat{\rho}_S^{(D)}(t) \text{ diagonal} \quad (4)$$

Según el criterio usual se dice que, como luego de un tiempo de decoherencia t_D la matriz $\rho_S(t)$ evolucionó a $\rho_S^{(D)}$ diagonal, entonces se dio un proceso de decoherencia. Esto equivale a pensar que $\rho_S(t)$ representa el estado de una parte del sistema total, y que esta parte se volvió clásica (Castagnino *et al* 2010).

2.2 La base privilegiada móvil

Como es sabido, el operador de estado es hermítico y, por lo tanto, siempre existe una base en la que es diagonal. Por lo tanto, puesto que un operador de estado ρ_S es siempre diagonal en alguna base, hay que aclarar a qué se refiere la expresión “ ρ_S se diagonaliza”. El vínculo con la realidad experimental viene dado a través de un observador con sus aparatos de medición dispuestos en un experimento, el sistema a ser medido y las condiciones ambientales del lugar donde el experimento se lleva a cabo. Esta disposición de los sistemas involucrados determina una base particular en la que se deben realizar los cálculos. A esta base se la llama “base privilegiada” (Paz *et al* 2002). Si hay decoherencia, el sistema evoluciona de manera que, luego de un tiempo, el estado expresado en esa base es diagonal; entonces desaparecen los términos de interferencia de los valores medios de todos los observables y se los puede pensar como valores medios clásicos. Así, la decoherencia no habla simplemente de la diagonalización del operador de estado, sino que habla de la diagonalización del estado escrito en una base particular.

3. Los problemas del enfoque ortodoxo

3.1 El problema de la base privilegiada móvil

Según EID la transición cuántico-clásica del sistema S puede explicarse del siguiente modo: dados el sistema S y el ambiente E , existe una base privilegiada en la que el estado reducido ρ_S del sistema S se vuelve diagonal en el tiempo de decoherencia t_D . Esta es una conclusión que surge a la vista de muchísimos modelos resueltos en la literatura sobre decoherencia. En la resolución de estos modelos primero se define el Hamiltoniano H del sistema a tratar, luego se halla la evolución no unitaria definida por S y E , se escribe $\rho(t)$ en una base “conveniente”, y se muestra que el estado reducido del sistema se vuelve diagonal luego del tiempo de decoherencia. En estas condiciones es posible formular dos preguntas:

- ¿Qué es el tiempo de decoherencia? La respuesta inmediata es la siguiente: Es el tiempo característico en el que el estado reducido se vuelve diagonal en la base privilegiada.
- ¿Qué es la base privilegiada? La respuesta inmediata es: Es la base en la que el estado reducido se vuelve diagonal luego del tiempo de decoherencia.

Evidentemente este enfoque tiene dos elementos teóricos que no han sido bien definidos, y un primer intento para definirlos da lugar a definiciones circulares. Por supuesto, siempre es posible postular uno de los elementos como un elemento no definido de la teoría; de hecho en la literatura muchas veces es esto lo que se hace. Pero esta postura tiene el inconveniente de que, a la hora de explicar la emergencia de las propiedades clásicas de un sistema cuántico (propiedades que se suponen objetivas) es necesario postular uno de estos elementos externos a la teoría cuántica, y esto se hace en forma arbitraria o, en el mejor de los casos, de un modo convencional. Por este motivo es necesaria una definición estricta o, al menos, un criterio.

Este problema fue percibido de inmediato entre los precursores del programa de la decoherencia y por ello se desarrolló un criterio que permite distinguir los elementos de la base privilegiada móvil, conocido como *predictability sieve criterion* (Zurek 2003). La idea básica es la siguiente. Para encontrar los estados de la base privilegiada, se deben considerar todos los posibles estados iniciales puros para el sistema y calcular la entropía asociada al estado reducido después de un tiempo t . Los estados que definen la base privilegiada son los que reducen al mínimo la producción de entropía. Este criterio es fácil de aplicar a sistemas simples donde el Hamiltoniano propio del sistema o el

Hamiltoniano de interacción se pueden despreciar. Por otro lado también ha sido aplicado al caso del movimiento browniano cuántico. Mediante este criterio se puede definir la base privilegiada, en tanto base menos afectada por la dinámica del sistema. Sin embargo, este criterio resulta difícil de aplicar en casos más generales ya que exige el cálculo de la evolución de la entropía del sistema (Castagnino *et al* 2004), lo cual puede ser fácil en casos muy estudiados como el del movimiento browniano cuántico, pero puede presentar muchas dificultades en un caso más general y depende fuertemente de la habilidad del observador de predecir la evolución temporal del sistema de interés. Por otro lado, el *predictability sieve criterion* está basado en el estudio de la entropía, un concepto que de por sí añade grandes dificultades conceptuales, en especial si se quiere aplicar a sistemas únicos o sistemas cerrados. Por mencionar una de las dificultades que trae introducir la entropía, se puede señalar la falta de una definición única de entropía (Kronz 1998). Introducir un concepto tan controversial y problemático a la hora de intentar aclarar el concepto de base privilegiada móvil puede resultar inconveniente, si bien no a la hora de algunas aplicaciones de la teoría, sí desde el punto de vista de los fundamentos de la decoherencia. Por este motivo se considera que el *predictability sieve criterion* es efectivamente un excelente criterio, pero la definición que de él se deriva puede ser mejorada. Estas dificultades se ven reflejadas en el hecho de que algunos autores no hacen mención a la llamada base privilegiada. Por ejemplo, en el libro de Roland Omnès (1994) se dedica un capítulo completo a la decoherencia, pero nunca se menciona la base privilegiada.

3.2 Las consecuencias del problema de la base privilegiada móvil

La consecuencia inaceptable de la circularidad es que, dado un sistema cuántico, siempre es posible construir una base privilegiada que esté asociada a cualquier tiempo de decoherencia arbitrario. Es conocido el hecho de que el estado sigue una evolución irreversible con un límite débil (Castagnino 2008):

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} \rightarrow \langle O_R \rangle_{\rho^*} \quad (5)$$

Esto significa que el sistema alcanza el estado de equilibrio ρ^* , y en la base de la energía este estado es diagonal, por lo tanto existe

1. la base de equilibrio final $\{|f^*\rangle\}$. Entonces,

$$\rho^* = \sum_f \rho_f |f^*\rangle \langle f^*| \quad (6)$$

El estado final de relajación queda diagonal en esta base.

Por otro lado se sabe que el operador de estado es hermítico y por lo tanto diagonalizable en todo momento. Esto significa que hay una base móvil que diagonaliza al operador de estado. Entonces existe

2. la base de diagonalización instantánea $\{|i(t)\rangle\}$ tal que

$$\rho(t) = \sum_i \rho_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)| \quad (7)$$

El estado es diagonal en esta base en todo momento.

Cabe señalar que la base que diagonaliza a un operador hermítico es única (se considera el caso no degenerado por simplicidad). Por lo tanto la base $\{|i(t)\rangle\}$ debe converger a la base $\{|f^*\rangle\}$ para tiempos largos.

Las bases 1 y 2 tienen las características particulares antes señaladas. También, a través de un cambio de base se puede llegar a una base genérica cualquiera $\{|j(t)\rangle\}$:

$$|j(t)\rangle = \sum_i a_j^i(t) |i(t)\rangle \quad (8)$$

Así, se tiene

3. una base móvil genérica tal que

$$\rho(t) = \sum_{j,j'} \rho_{j,j'}(t) |j(t)\rangle \langle j'(t)| \quad (9)$$

A continuación se determina cuáles son las condiciones que deben cumplir los coeficientes $a_j^i(t)$ para que $\{|j(t)\rangle\}$ se convierta en la base privilegiada móvil. Una buena base privilegiada móvil es aquella que diagonaliza al operador de estado luego del tiempo de decoherencia. Además

- a. El tiempo de decoherencia t_D del sistema es el tiempo en el que el estado $\rho(t)$ adopta una forma diagonal en una de las posibles bases $\{|j(t)\rangle\}$.
- b. El tiempo de relajación t_R del sistema es el tiempo en el que el estado alcanza el equilibrio.

Entonces, se presentan diferentes opciones para elegir la base de la decoherencia:

- Si se elige la base $\{|j(t)\rangle\} = \{|f^*\rangle\}$ se tiene que $t_D = t_R$, porque en el tiempo de relajación t_R , $\rho(t)$ se vuelve diagonal en la base de equilibrio.

- Si se elige la base $\{|j(t)\rangle\} = \{|i(t)\rangle\}$, se tiene que $t_D = 0$ porque $\rho(t)$ es siempre diagonal en la base $\{|i(t)\rangle\}$.
- Por último puede hacerse una elección especial para la base genérica $\{|j(t)\rangle\}$. Se elige un tiempo de decoherencia t_D totalmente arbitrario tal que $0 < t_D < t_R$ y se toman los coeficientes $a_j^i(t)$ de la ecuación (8), que definen el cambio de base entre $\{|j(t)\rangle\}$ y $\{|i(t)\rangle\}$, como
 - Para $t \in [0, t_D]$ se impone la condición $a_j^i(t) \neq \delta_j^i$, fuera de esto los coeficientes son genéricos.
 - Para $t \in [t_D, t_R]$ se impone la condición $a_j^i(t) = \delta_j^i$.
 - Por otra parte en el tiempo t_D , $a_j^i(t)$ debe ser una función continua (i.e. de modo que el salto de régimen “i” al régimen de “ii” sea continuo).

Evidentemente, adoptar la última opción para definir la base de la decoherencia es la más general, y cumple con los requisitos de una “buena” base de la decoherencia

- Para $t < t_D$, $\{|j(t)\rangle\} \neq \{|i(t)\rangle\}$ y $\rho(t)$ no es diagonal en la base $\{|j(t)\rangle\}$.
- Para $t > t_D$, $\{|j(t)\rangle\} = \{|i(t)\rangle\}$ y $\rho(t)$ es diagonal en la base $\{|j(t)\rangle\}$.
- Para $t \rightarrow t_R$, $|j(t)\rangle = |i(t)\rangle \rightarrow |f^*\rangle$ y $\rho(t)$ es diagonal en la base $\{|j(t)\rangle\}$.

Queda claro que este procedimiento está basado en la elección arbitraria del tiempo de decoherencia t_D . Por esta razón, a la base $\{|j(t)\rangle\}$ se la llama *base privilegiada móvil* para el tiempo t_D .

En definitiva, la base $\{|j(t)\rangle\}$ cumple todos los requisitos de una base privilegiada móvil. Esto pone claramente en evidencia que es posible encontrar una base privilegiada para cualquier tiempo de decoherencia t_D arbitrario tal que $0 < t_D < t_R$. Ésta es una manifestación de la circularidad entre las definiciones de base privilegiada y tiempo de decoherencia mencionada.

Por otro lado esta sección deja un corolario: dado el tiempo de decoherencia, es posible definir la base privilegiada. Así, un camino posible para dar una definición

precisa de base privilegiada sería encontrar el tiempo de decoherencia por algún método que no involucrara la base privilegiada.

4. Una propuesta de definición de la base privilegiada

En esta sección se resume el procedimiento matemático conocido como *Técnica Polar* introducido por la escuela de Bruselas (Castagnino *et al* 1997, Laura *et al* 1998, retomada en Castagnino *et al* 2005 y Castagnino *et al* 2011) para calcular tiempos de decoherencia. Y se muestra que, puesto que esta técnica permite calcular el tiempo de decoherencia a partir del Hamiltoniano del sistema, se rompe la circularidad entre las definiciones de tiempo de decoherencia y base privilegiada móvil.

4.1 Los polos y su papel en los valores medios

Esta técnica parte del supuesto de que el Hamiltoniano H del sistema se puede expresar como la suma de un Hamiltoniano libre H_0 y una perturbación V

$$H = H_0 + V \quad (10)$$

El Hamiltoniano libre es el que corresponde a un sistema conocido y bien estudiado, como pueden ser la partícula libre, el oscilador armónico, el pozo infinito, etc, de modo que los autoestados $|\omega\rangle$ y autoenergías ω son conocidas

$$H_0|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle \quad \text{y} \quad \langle\omega|H_0 = \omega\langle\omega| \quad (11)$$

Los estados de H_0 forman una base completa y ortonormal

$$I = \int |\omega\rangle\langle\omega| d\omega \quad \text{y} \quad \langle\omega|\omega'\rangle = \rho(\omega' - \omega) \quad (12)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano total tiene su propia base de autovectores

$$H|\omega^+\rangle = \omega^+|\omega^+\rangle \quad \text{y} \quad \langle\omega^+|H = \omega^+\langle\omega^+| \quad (13)$$

que también es completa y ortonormal

$$I = \int |\omega^+\rangle\langle\omega^+| d\omega^+ \quad \text{y} \quad \langle\omega^+|\omega'^+\rangle = \rho(\omega'^+ - \omega^+) \quad (14)$$

De modo que el Hamiltoniano total se puede expresar en cualquiera de las dos bases.

$$H = H_0 + V = \int \omega|\omega\rangle\langle\omega| d\omega + \int \int V_{\omega\omega'}|\omega\rangle\langle\omega'| d\omega d\omega' = \int \omega^+|\omega^+\rangle\langle\omega^+| d\omega^+ \quad (15)$$

Con estos supuestos, la técnica polar hace uso de la teoría de perturbaciones según la cual hay una relación entre los autoestados del Hamiltoniano perturbado y el Hamiltoniano sin perturbar. Esta relación está dada por las ecuaciones de Lippmann-Schwinger

$$\begin{aligned}\langle \psi | \omega^+ \rangle &= \langle \psi | \omega \rangle + \langle \psi | \frac{1}{\omega + i0 - H} V | \omega \rangle \\ \langle \omega^+ | \psi \rangle &= \langle \omega | \psi \rangle + \langle \omega | \frac{1}{\omega + i0 - H} V | \psi \rangle\end{aligned}\quad (16)$$

El segundo término del lado derecho de esta última ecuación es una integral. Para resolver esta integral es necesario pasar al plano complejo y calcular polos y residuos. Estos polos fueron profundamente estudiados por la escuela de Bruselas y pueden interpretarse como “energías” complejas del sistema. Según esta propuesta, la “energía” z_n del sistema perturbado tiene una parte real y una parte imaginaria

$$z_n = \omega_n - i\gamma_n \quad (17)$$

donde la parte real ω se corresponde con la energía tradicional y la parte imaginaria γ es la que dará lugar a la evolución no unitaria. En la bibliografía (Laura *et al* 1998) se demuestra que las partes imaginarias de estos polos aparecen en los valores medios como tiempos característicos de funciones exponenciales

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = \langle O \rangle_{\rho(t)} + \sum_n a_n(t) e^{-\gamma_n t} \quad (18)$$

Así, cada exponencial tiene un tiempo característico

$$\tau_n = \frac{1}{\gamma_n} \quad (19)$$

Esto muestra que el conjunto de todos los polos puede considerarse como el catálogo de los tiempos característicos del sistema cuántico. Por lo que es razonable suponer que los tiempos de decoherencia y relajación deben encontrarse dentro de este catálogo.

4.2 La base privilegiada en el caso de dos polos

Para el caso de un sistema con dos polos, (el caso general de N polos se encuentra en desarrollo) el valor medio de un observable genérico resulta

$$\langle O \rangle_{\rho(t)} = \langle O \rangle_{\rho(t)} + a_0(t) e^{-\gamma_0 t} + a_1(t) e^{-\gamma_1 t} \quad (20)$$

donde es evidente que hay dos tiempos característicos, $t_0 = \gamma_0^{-1}$ y $t_1 = \gamma_1^{-1}$, entre los cuales hay que identificar el tiempo de decoherencia t_D y el tiempo de relajación t_R . El tiempo de relajación es fácil de identificar, ya que se entiende relajación como la situación en la que el estado del sistema deja de evolucionar y los valores medios quedan constantes. De modo que el tiempo de relajación debe ser el tiempo característico más largo. Si suponemos que $t_0 > t_1$ entonces

$$t_R = t_0 \quad (21)$$

En este caso no hay otra opción, el tiempo de decoherencia debe ser el tiempo característico restante

$$t_D = t_1 \quad (22)$$

Esta es la tesis fundamental de la técnica polar aplicada a la decoherencia: el conjunto de todos los tiempos característicos del sistema está dado por los polos, y es en este conjunto que se deben hallar los tiempos de decoherencia y relajación.

Una vez que se ha identificado el tiempo de decoherencia, el círculo de la sección 3.1 se rompe y hallar la base privilegiada es sencillo: solamente hay que seguir el procedimiento definido en la sección 3.2. En otras palabras, la base privilegiada es aquella que, después del tiempo de decoherencia, permite expresar al operador de estado en forma diagonal. Esta definición de la base privilegiada parece ser la misma que la del enfoque ortodoxo, pero no es así porque con la técnica polar se puede calcular el tiempo de decoherencia en forma independiente y no hay circularidad.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado claramente cuál es la ambigüedad en la definición de la base privilegiada móvil. La demostración de la Sección 3.1 es muy importante ya que no sólo muestra el problema en forma explícita, sino que forma parte activa de su solución puesto que brinda una estrategia que permite construir la base privilegiada móvil dado el tiempo de decoherencia.

Además, se ha expuesto la forma en que opera la llamada Técnica Polar, que permite definir los tiempos de decoherencia y de relajación de un sistema cuántico. La hipótesis fundamental es que los polos suministran el catálogo de tiempos característicos. Por lo tanto, el estudio de la distribución de estos polos permite establecer que:

- El polo más cercano al eje real corresponde al tiempo característico más largo y se asocia al tiempo de relajación t_R .
- El tiempo de decoherencia t_D está asociado al otro polo.

La Técnica Polar fue desarrollada con el fin de aportar claridad conceptual y resolver los problemas del enfoque EID. Pero, adicionalmente, la Técnica Polar trae consigo una ventaja de orden pragmático. Según los métodos desarrollados aquí, la clave para hallar los tiempos de decoherencia y de relajación de los sistemas está en el

cálculo de los polos una función. Para ello se puede aprovechar la infinidad de software desarrollado en ingeniería para el cálculo de polos de funciones en el contexto de Teoría de Circuitos. La Teoría de Circuitos establece que cada componente electrónico tiene asociada una función, que se debe combinar con las funciones de los otros componentes para dar lugar a la ecuación diferencial para la corriente del circuito. A esta ecuación diferencial se le aplica la transformada de Laplace, y al resultado se le buscan los polos. Estos polos son los que dan la información acerca de cómo responde el circuito ante un determinado estímulo. Puesto que esta técnica consiste en buscar polos y se aplica a infinidad de circuitos de interés comercial, la industria ya ha invertido mucho esfuerzo y dinero en desarrollar software con este fin, recursos que se puede aprovechar para estudiar la decoherencia de los sistemas cuánticos.

6. Bibliografía

- Castagnino, M. y Laura, R. (1997), “Minimal irreversible quantum mechanics: Pure-state formalism”, *Physical Review A*, **56**, 108.
- Castagnino, M. y Lombardi, O. (2004), “Self-induced decoherence: a new approach”, *Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, **35**, pp. 73-107.
- Castagnino, M. y Lombardi, O. (2005), “Decoherence time in self-induced decoherence”, *Physical Review A*, **72**, 012102.
- Castagnino, M., Fortin, S., Laura, R. & Lombardi, O. (2008), “A general theoretical framework for decoherence in open and closed systems”, *Classical and Quantum Gravity*, **25**, 154002.
- Castagnino, M. y Fortin, S. (2010), “El esquema general de la decoherencia como punto de partida para un enfoque basado en valores medios”, *Epistemología e Historia de la Ciencia 2009*, Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina, pp 142-150.
- Castagnino, M. y Fortin, S. (2011), “On a possible definition of the moving preferred basis”, arXiv:1009.0535, enviado a *Journal of Physics A*.
- Kronz, F. M. (1998), “Nonseparability and Quantum Chaos”, *Philosophy of Science*, **65**, 1.

- Laura, R. y Castagnino, M. (1998), “Minimal irreversible quantum mechanics: The mixed states and the diagonal singularity”, *Physical Review A*, **57**, pp 4140.
- Omnès, R. (1994), *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton.
- Paz, J. P. y Zurek, W. (2002), “Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical”, en Heiss (ed.), *Fundamentals of Quantum Information, Lecture Notes in Physics*, Vol. 587, Heidelberg-Berlin: Springer.
- Schlosshauer, M. (2007), *Decoherence and the Quantum-to-Classical transition*, Springer, Berlin.
- Zurek, W. H. (1993), “Preferred States, Predictability, Classicality and the Environment-Induced Decoherence”, *Progress of Theoretical Physics*, **89**, pp. 281-302.